シューア積作用素のノルム(作用素不等式とその周辺)

AUTHOR(S):

大久保, 和義

数理解析研究所講究録
903巻 1995年 57-69

シューア積作用素のノルム

北海道教育大 札幌校　大久保　和義 (Kazuyoshi Okubo)

1. はじめに

M_nを $n \times n$ 複素行列全体からなる線形空間とする。M_n 上には様々なノルムが考えられるが、ここでは、次のノルムを考える。

スペクトラルノルム: $\|A\|_\infty = \sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

数域半径: $w(A) = \sup_x \frac{|\langle Ax \mid x\rangle|}{\|x\|^2}$

$A \in M_n$ に対して、M_n 上の線形写像(シューア積作用素) S_A を $S_A(B) = A \circ B$ で定義する。ここで、$A = (a_{ij})$、$B = (b_{ij})$ に対して $A \circ B = (a_{ij} \cdot b_{ij})$(A と B のシューア積、あるいは アダマール積という)とする。

S_A は M_n 上の線形作用素であるから、M_n 上の ノルム に関して S_A の誘導ノルムが考えられる。我々は $\|\cdot\|_\infty$, $w(\cdot)$ に関する S_Aの誘導ノルムをそれぞれ、$\|S_A\|_\infty, \|S_A\|_w$ で表す。 即ち、

$$\|S_A\|_\infty = \max_X \frac{\|A \circ X\|_\infty}{\|X\|_\infty},$$

$$\|S_A\|_w = \max_X \frac{w(A \circ X)}{w(X)}$$

で定義する。

本稿では、シューア積に関して今までに知られている主な結果と、特にシューア積作用素に関する誘導ノルムについての概説を行う。

2. シューア積の例

行列のシューア積は成分ごとの積で定義されるが、この積はアダマール積と呼ばれることが多い。この理由は、Hadamard が 1899年に出した論文で、次のことを示したことによる。即ち、正の収束半径をもつ2つのマクローリン級数

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_n z^n \text{ と } g(z) = \sum_{i=1}^{\infty} b_n z^n$$

に対して、係数ごとの積を係数とする級数 $h(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_n b_n z^n$ を考え $h(z)$ が $f(z)$ と $g(z)$ の合成積で与えられるということである。Hadamard 自身は行列の成分ごとの積に

ついては考えていないが、この結果が解析学のいろいろな分野で使われ、成分ごとの積に関して Hadamard の名前が使われたようである。行列に関して成分ごとの積に関するすぐれた結果を出しのは Schur であり、したがって、我々はこの積のことをシューア積と呼ぶ。シューア積の例としては、つぎのようなものがある。

[例 1] Toeplitz 行列

f, g を連続な周期 2πの関数とする。このとき、

$$a_k = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} f(\theta)\, d\theta, \quad b_k = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} g(\theta)\, d\theta \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

として、

$$h(\theta) = (f * g)(\theta) = \int_0^{2\pi} f(\theta - t) g(t)\, dt$$

$$c_k = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} h(\theta)\, d\theta$$

とすると、$c_k = a_k \cdot b_k$ となる。従って、T_f を f の Toeplitz 行列とするとき（i.e. $T_f = (a_{i-j})$）、$T_{f*g} = T_f \circ T_g$ となる。

[例 2] 単調行列関数

f が order n の単調行列関数 on (a, b) であるとは

$A, B \in M_n$: エルミート, 固有値 $\in (a, b)$ で $A \geq B$ とするとき $f(A) \geq f(B)$ が成り立つことであると定義する。

$H(t) = [h_{ij}(t)]$ を連続微分可能なエルミート行列を値とする関数で、$H(t) = U(t)\Lambda(t)U^*(t)$ とする。

ただし、$\Lambda(t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t))$ である。

また、実数値関数 f が $\lambda_i(t)$ の近傍で微分可能とすると $f(H(t)) = U(t)f(\Lambda(t))U^*(t)$ で、$\frac{d}{dt}f(H(t)) = U(t)\{K_f((\lambda_i(t))) \circ [U^*(t)H'(t)U(t)]U^*(t)\}$ となる。ここで、 $K_f(\{\lambda_i(t)\})$ は

$$K_f((\xi_j)) = \begin{cases} f'(\xi_p) & (\xi_p = \xi_q) \\ \dfrac{f(\xi_p) - f(\xi_q)}{\xi_p - \xi_q} & (\xi_p \neq \xi_q) \end{cases}.$$

で定義される Loewner matrix である。

f が order n の単調行列関数であるための必要十分条件は$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ に対して $K_f((\xi_j)) \geq 0$ となることである。

これは次のことから示される。
$H(t) = B + t(A - B)$ とおくと、$x \in C^n$ に対して、
$x^* \left[\frac{d}{dt} f(H(t))\right] x$
$= x^* U(t) \left[K_f(\{\lambda_i(t)\}) \circ [U^*(t) H'(t) U(t)]\right] U^*(t) x$
$= [U^*(t)x]^* \left[K_f(\lambda_i(t)) \circ \{U^*(t)[A - B]U(t)\} U^*(t) x\right]$
となるから、$A \geq B$ なら $K_f(\{\lambda_i(t)\}) \geq 0$ のとき、$\frac{d}{dt} f(H(t)) \geq 0$ がいえる。さらに、中間値の定理から、ある $0 \leq c \leq 1$ で

$$x^* f(A) x - x^* f(B) x = x^* \left[\frac{d}{dt} f((H(t))|_{t=c}\right] x$$

より、$f(A) \geq f(B)$ がいえる。
[例 3] Lyapunov equation への応用
$A \in M_n$ が与えられているとき、$H \in M_n$ に対して

(*) $$GA + A^* G = H$$

なる方程式を考える。
(*) がただ 1 つの解をもつための必要十分条件は、A の固有値の集合
$\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ が $\bar{\lambda}_i + \lambda_j \neq 0$ $(i \neq j)$ を満たすことである。
さらに、A が対角化可能なとき $\left(A = S diag(\lambda(A)) S^{-1}\right)$、その解は
$S^* G S = L(A) \circ S^* H S$ (ただし、$L(A)$ は $L(A) = \left[\frac{1}{\bar{\lambda}_i + \lambda_j}\right]$ なる Cauchy matrix) とシューア積を用いて表される。

これら以外にシューア積に関する応用としては、統計学における covariance matrix, システム工学における relative gain array などがあるが、[11],[14] を参照されたい。

3. Schur の結果

シューア積に関する代数的、解析的な性質の組織的な研究を最初に行ったのは、I.Schur であろう。Schur(1911) は次のことを示している。
[定理 1]
(α) $A, B (\in M_n) \geq 0$ ならば $A \circ B \geq 0$ である。
(β) $A, B (\in M_n) \geq 0$ ならば

$$\min_{1 \leq i \leq n} a_{ii}\ \lambda_{min}(B) \leq \lambda_{min}(A \circ B) \leq \lambda_{max}(A \circ B) \leq \max_{1 \leq i \leq n} a_{ii}\ \lambda_{max}(B)$$

(γ) $A=[a_{ij}], B\geq 0$ ならば、$\|A\circ B\|_\infty \leq \max_i a_{ii}\cdot\|B\|_\infty$

(δ) $A,B\in M_n$ で $A=X^*Y$ $(X,Y\in M_{rn})$ ならば、

$$\|A\circ B\|_\infty \leq c_1(X)c_1(Y)\|B\|_\infty$$

を満たす。(ただし、$c_1(X)$ は、X の列ベクトルの最大の長さ)

(ϵ) $A,B\in M_n$ に対して、$\|A\circ B\|_\infty \leq \|A\|_\infty\|B\|_\infty$

$A,B\in M_n$ に対して、$A\otimes B$ で A と Bのテンソル積、$\lambda(A)$ で A の固有値全体の集合を表すことにする。このとき、(α) については、$\lambda(A\otimes B)=\{\lambda\mu \mid \lambda\in\lambda(A),\ \mu\in\lambda(B)\ \}$ と $(A\otimes B)^*=A^*\otimes B^*=A\otimes B$ から $A\otimes B\geq 0$ となることが分かり、$A\circ B$ は $A\otimes B$ の $\{1,n+2,\cdots,n^2\}$ 行、列の主部分行列であることから示される。
残りの内容はほとんどこの (α) を用いて示すことが出来る。例えば、$\lambda_{min}(B)$ で $\lambda(B)$ の最小値を表すとするとき、

$$\begin{aligned}A\circ B &= A\circ(B-\lambda_{min}(B)I)+\lambda_{min}(B)(A\circ I)\\ &\geq \lambda_{min}(B)(A\circ I)\end{aligned}$$

から、$\lambda_{min}(A\circ B)\geq(min a_{ii})\lambda_{min}(B)$ が導かれる。

4. Johnson and Bapat の予測について

$A\in M_n$ をエルミート行列として、その固有値を大きい方から並べたのを $\lambda_1(A),\lambda_2(A),\cdots,\lambda_n(A)$ とする。ここでは、これらの固有値の積に関する不等式について述べよう。まず、Oppenhaim(1930) によって次の不等式が示された。
[定理 2] $A,B=[b_{ij}](\in M_n)\geq 0$ ならば、$\det A\prod_{i=1}^n b_{ii}\leq \det(A\circ B)$
このことと、Hadamard によって示された次の不等式
$0\leq A=[a_{ij}]\in M_n$ に対して

$$detA\leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

が成り立つことから、
$\prod_{i=1}^n\lambda_i(AB)=det(AB)=detA\cdot detB\leq detA\prod_{i=1}^n b_{ii}\leq det(A\circ B)=\prod_{i=1}^n\lambda_i(A\circ B)$ がいえる。また、別な証明によって左辺の B を B^t にかえて、
[定理 3] $A,B(\in M_n)$ ≥ 0 のとき、

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(AB) \leq \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(A \circ B)$$

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(AB^t) \leq \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(A \circ B)$$

が示される。

一方、$0 \leq A, B \in M_n$ に対して

$$\lambda(AB) \in [\lambda_{min}(A), \lambda_{max}(A)][\lambda_{min}(B), \lambda_{max}(B)]$$

がいえるから、

$$\lambda_{min}(AB) \geq \lambda_{min}(A)\lambda_{min}(B)$$

が成り立ち、さらに

$$\lambda(A \otimes B) = \{\lambda\mu \mid \lambda \in \lambda(A),\ \mu \in \lambda(B)\ \}$$

がいえることから、

$$\lambda_{min}(A \circ B) \geq \lambda_{min}(A)\lambda_{min}(B)$$

が成り立つ。$A, B \geq 0$ のとき $\lambda_{min}(AB)$ と $\lambda_{min}(A \circ B)$ の関係として、Fiedler(1983)、Johnson and Elsner(1987) によって、次のことが示された。

[定理 4] $A, B(\in M_n)\ \geq 0$ のとき、

(a) $\lambda_{min}(A \circ B) \geq \lambda_{min}(AB^t)$

(b) $\lambda_{min}(A \circ B) \geq \lambda_{min}(AB)$

定理 3 と定理 4 を合わせて考えることにより、

[Johnson and Bapat の conjecture(1988)]

$X \in M_n$ をエルミート行列として、$\lambda_1(X) \geq \lambda_2(X) \geq \cdots \geq \lambda_n(X)$ とするとき、

$$\prod_{i=1}^{k} \lambda_{n-i+1}(AB) \leq \prod_{i=1}^{k} \lambda_{n-i+1}\ (A \circ B)\ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

が与えられた。これに対して、Ando, Visick が独立に肯定的に解決した (共に 1994)。この証明で Ando は、$0 < A, B \in M_n$ に対して、

$$\log(A \circ B) \geq (\log A + \log B) \circ I$$

と

$$\sum_{i=k}^{n}\lambda_i(\log A+\log B)\geq\sum_{i=k}^{n}\lambda_i(\log A^{1/2}BA^{1/2})\ (k=1,2,\cdots,n)$$

が成り立つというこのこと自体も興味のある結果を用いている。さらに、この証明方法を利用して、

$$\prod_{i=1}^{k}\lambda_{n-i+1}(AB^t)\leq\prod_{i=1}^{k}\lambda_{n-i+1}\ (A\circ B)\ (k=1,2,\cdots,n)$$

という結果も示した。

5. Marcus, Kidman and Sandy の conjecture について

[Marcus, Kidman and Sanday の conjecture (1984)]

$\|\cdot\|$ を M_n 上の unitarilly invariant norm とするとき、

$$\|A\circ B\|\leq\|A\|\ \|B\|\ (A,B\in M_n).$$

これは、次の特異値に関する majorization で肯定的に解決された。即ち、$\{\sigma_i(A)\}$ を decreasing order の特異値 (i.e. $\sigma_i(A)$ は $(A^*A)^{1/2}$ の eigenvalue で、$\sigma_1(A)\geq\sigma_2(A)\geq\cdots\geq\sigma_n(A)$) とするとき、Horn and Johnson(1987)、Bapat(1987)、Okubo(1987)、Zhang(1988) によって

[定理 5] $A,B\in M_n$ に対して、

$$\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(A\circ B)\leq\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(A)\sigma_i(B)\ (k=1,2,\cdots,n)$$

が示された。より一般的に Ando, Horn and Johnson(1987) により、

[定理 6] $A,B\in M_n$ で $A=X^*Y$ $(X,Y\in M_{rn})$ ならば

$$\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(A\circ B)\leq\sum_{i=1}^{k}c_i(X)c_i(Y)\sigma_i(B)\ (k=1,2,\cdots,n)$$

が成り立つ (ただし、$\{c_i(X)\}$ は X の decreasing order の列ベクトルの長さ)。

が示された。

このことから、$\{r_i(X)\}$ は X の decreasing order の行ベクトルの長さとするとき、次のことがいえる。

[定理 7] $A,B\in M_n$ に対して、

$$\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(A\circ B)\le\sum_{i=1}^{k}[c_i(A)r_i(A)]^{1/2}\sigma_i(B)\ (k=1,2,\cdots,n)$$

[Open problem] $0\le\alpha\le1,\ A,B\in M_n$ に対して、

$$\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(A\circ B)\le\sum_{i=1}^{k}c_i(A)^{\alpha}r_i(A)^{1-\alpha}\sigma_i(B)\ (k=1,2,\cdots,n)$$

6. シューア積作用素ノルム

シューア積の作用素ノルムについて述べよう。

定理 6 のことより、$A\in M_n$ に対して、$A=X^*Y$ とするとき、

$$\|S_A\|_\infty\le c_1(X)c_1(Y)$$

であることがわかる。このことに関連することとして、Haagerup(1986) により シューア積作用素 S_Aは $(M_n,\|\cdot\|_\infty)$ 上の completely bounded map であって、その completely bounded norm が $\|S_A\|_\infty$ であり、かつ、

$$\|S_A\|_\infty=\min\{c_1(S)c_1(R)\mid S^*R=A\}$$

で与えられることが示された。さらに $\|S_{(\cdot)}\|_\infty$ の特徴付けとして次の定理を示した。

[定理 8] $A=(a_{ij})\in M_n$ に対して次は互いに同値である。

(1) $\|S_A\|_\infty\le1$

(2) A は $A=B^*C$ と表示できる。ただし、$B,C\in M_n$ は $B^*B\circ I\le I$ で、$C^*C\circ I\le I$ である。

(3) $a_{ij}=\langle x_j\mid y_i\rangle(i,j=1,2\cdots,n)$ と表示できる。ただし、$x_i,y_i\in C^n$ は $\|x_i\|\le1,\|y_i\|\le1$ を満たす $\big(i=1,\cdots,n\big)$。

(4)

$$\begin{pmatrix}R_1 & A\\ A^* & R_2\end{pmatrix}\ge0$$

を満たし、かつ $R_1\circ I\le I,R_2\circ I\le I$ となる $(0\le)R_1,R_2\in M_n$ が存在する。

Ando と Okubo(1991) は数域半径に関するシューア積作用素ノルムについて Haagerup 型の特徴付けを行い、その結果として Haagerup による 定理 7 の特徴付けが導かれることを示した。

[定理 9] $A=(a_{ij})\in M_n$ に対して次は互いに同値である。

$(1)_w$ $\|S_A\|_w\le 1$

$(2)_w$ A は $A=B^*WB$ と表示できる。ただし、$B,W\in M_n$ は $B^*B\circ I\le I$ で、$\|W\|_\infty\le 1$ である。

$(3)_w$ $a_{ij}=\langle Wx_j\,|\,x_i\rangle\ \big(i,j=1,2\cdots,n\big)$ と表示できる。ただし、$W\in M_n$ は $\|W\|_\infty\le 1$, かつ、$x_i\in C^n$ は $\|x_i\|\le 1$ を満たす。

$(4)_w$

$$\begin{pmatrix} R & A \\ A^* & R \end{pmatrix}\ge 0,\quad R\circ I\le I$$

を満たす $0\le R\in M_n$ が存在する。

また、スペクトラルノルムによるシューア積作用素ノルムは、数域半径によるのを使って次のように表される。

[定理 10] $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると、$\|S_A\|_\infty=\|S_{\mathbf{A}}\|_w\quad(A\in M_n)$ となる。

この結果と定理 9 から Haagerup の定理 8 の (1) から (4) を導くことができる。

さらに、定理 9 からは次のことがいえる。

[定理 11]

$$\|S_A\|_\infty\le\|S_A\|_w\le 2\|S_A\|_\infty\quad(A\in M_n).$$

[定理 12]

$$\|S_A\|_w\le\|A\|_\infty\quad(A\in M_n).$$

[定理 13] A が エルミート行列、またはユニタリ行列のとき、$\|S_A\|_\infty=\|S_A\|_w$ である。

A が正規行列のときに $\|S_A\|_\infty=\|S_A\|_w$ は一般的に成り立たないことが次の例からわかる。

$A=\begin{bmatrix} 1-i & 1-i \\ -1+i & 3+i \end{bmatrix}$ とすると A は正規である。

C.Cowen らの結果 [9] を用いると、$\|S_A\|_\infty=\sqrt{10}$ となることがわかる。

また、$w\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)=1$ だから $\|S_A\|_w\ge w\left(A\circ\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)\ge 1+\sqrt{5}\ge\sqrt{10}$ となる。

また、R.Mathias によって、$\|S_A\|_\infty$ の次の下からの評価が与えられた。

[定理 14] $A \in M_n$ に対して、

$$\frac{1}{n}\|A\|_1 \le \|S_A\|_\infty$$

ただし、$\|A\|_1$ は trace norm とする。

さらに、この不等式で等号が成り立つ条件は、$|A| \circ I = |A^*| \circ I = \frac{1}{n}(\mathrm{tr}|A|)I$ である。

7. $\|S_A\|_\infty = \|S_A\|_w$ が成り立つ条件について

Mathias は $|z| = 1$ として $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ z & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ とするときに、この行列を z−circulant、$A = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i C^i$ となる A を 一般化された z-circulant と呼んだ。このとき、次が示される。

[定理 15] A が 一般化された z-circulant $(|z| = 1)$ のとき、

$$\|S_A\|_\infty = \|S_A\|_w = \frac{1}{n}\|A\|_1$$

が成り立つ。

[定理 16] $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(A, 0 \in M_n)$ とすると、$\|S_\mathbf{A}\|_\infty = \|S_\mathbf{A}\|_w$ となる。

一般的に シューア積作用素ノルムを計算することは難しい。ここでは特別な行列についての計算を行う。

$J \in M_n$ を全ての成分が 1 の行列、$S = [sgn(j-i)] \in M_n$, $T = S + I$ とする。このとき、$J - I$, S, T は一般化された circulant 行列だから、$\|S_{J-I}\|_\infty = 2(n-1)/n, \|S_S\|_\infty = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |\cot(2j-1)\pi/2n|$, $\|S_T\|_\infty = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |\csc(2j-1)\pi/2n|$ となることが証明できる。($J - I$ のノルムについては Bhatia, Choi and Davis(1989) によって示されている。)

さらに、$R_n = [r_{ij}] \in M_n$ を truncation matrix (i.e. $r_{ij} = 1 (i \le j), = 0 (i > j)$) とするとき、

$$\frac{n+1}{2n}\sum_{j=1}^{n} |\csc(2j-1)\pi/2n| \le \|S_R\|_\infty \le \frac{\sum_{j=1}^{n} |\csc(2j-1)\pi/2n| + 1}{2}$$

が示される。また、このことから、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|S_{A_n}\|_\infty}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|S_{A_n}\|_w}{\log n} = \frac{1}{\pi}$$

がわかる。このことは、Mathaias [21], Angelos, Cowen and Narayan[6] によって示された。

なお、$n=2$ のときは、

$$\|S_{A_2}\|_\infty = \|S_{A_2}\|_w = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

となることが計算できる。さらに、$n=2$ のとき、$A_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ for any $z \in C$ とするとき、$\|S_{A_z}\|_w = \|S_{A_z}\|_\infty$ である。特に、$z = a \in R$ のときには、

$$\|S_{A_a}\|_\infty = \begin{cases} |a| \ (a \geq 1, \ a \leq \dfrac{-\sqrt{5}+1}{2}) \\ \sqrt{1-a} \ (\dfrac{-\sqrt{5}+1}{2} < a < -1) \\ \sqrt{\dfrac{4}{a+3}} \ (-1 \leq a \leq 1) \end{cases}$$

が計算できる。

8. テンソル積とシューア積作用素ノルム

行列のテンソル積に関しては $A, B \in M_m$, $C, D \in M_n$ に対して

$$(A \circ B) \otimes (C \circ D) = (A \otimes C) \circ (B \otimes D)$$

が成り立ち、また、次の不等式がいえることは容易にわかる。

$$w(A)w(B) \leq w(A \otimes B) \leq \|A\|_\infty w(B)$$

このことから次の定理がいえる。

[定理 17] $A \in M_m$ と $B \in M_n$ に対して、

$$\|S_{A\otimes B}\|_\infty = \|S_A\|_\infty \|S_B\|_\infty$$

と

$$\|S_{A\otimes B}\|_w \leq \|S_A\|_w \|S_B\|_w.$$

が成り立つ。かつ、ユニタリ行列 X が存在して $\|S_A\|_w = w(A \circ X)$ (or $\|S_B\|_w = w(B \circ X)$), を満たすならば

$$\|S_{A\otimes B}\|_w = \|S_A\|_w \|S_B\|_w$$

が成り立つ。

[系 18] A または B がエルミート、または、ユニタリ行列ならば

$$\|S_{A\otimes B}\|_w = \|S_A\|_w \|S_B\|_w$$

となる。特に、$\|S_{J_k\otimes A}\|_w = \|S_A\|_w$ が成り立つ。

$\|S_{A\otimes B}\|_w$ の下からの評価は次で与えられる。

[定理 19] $A \in M_m$, $B \in M_n$ に対し、

$$\|S_{A\otimes B}\|_w \geq \frac{1}{2}\|S_A\|_w \|S_B\|_w.$$

が成り立つ。また、定数 $\frac{1}{2}$ は最良である。

References

1. T. Ando, *Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard product*, Linear Algebra Appl. **26** (1979), 203–241.
2. T. Ando, *Majorization and inequalities in matrix theory*, Linear Algebra Appl. **199** (1994), 17–67.
3. T. Ando, *Majorization relations for Hadamard products*, Linear Algebra Appl. (to appear).
4. T. Ando, R. Horn and Ch. R. Johnson, *The singular values of a Hadamard product: Basic inequalities*, Linear and Multilinear Algebra **21** (1987), 345–364.
5. T. Ando and K. Okubo, *Induced norms of the Schur multiplier operator*, Linear Algebra Appl. **147** (1991), 181–199.
6. J. R. Angelos, C. C. Cowen, S. K. Narayan, *Triangular truncation and finding the norm a Hadamard multipliers*, Linear Algebra Appl. **170** (1992), 117–135.
7. R. B. Bapat, *Majorization and singular values*, Linear and Multilinear Algebra **21** (1987), 211–214.
8. R. Bhatia, M.–D. Choi and C. Davis, *Comparing a matrix to its off-diagonal part*, Oper. Theory: Adv. Appl. **40** (1988), 151–164.
9. C. C. Cowen, K. E. Debro and P. D. Sepanski, *Geometry and the norm of Hadamard multipliers*, Linear Algebra Appl. (to appear).

10. M. Fiedler, *A note on the Hadamard product of matrices*, Linear Algebra Appl. **49** (1983), 233–235.

11. R. A. Horn, "Matrix theory and application, Proceedings of symposia in applied Mathematics," American Mathematical Society, 1990.

12. R. A. Horn and Ch. R. Johnson, "Matrix Analysis," Cambridge U. P., Cambridge UK, 1985.

13. R. A. Horn and Ch. R. Johnson, *Hadamard and conventional submultiplicativity for unitarily invariant norms on matrices*, Linear and Multilinear Algebra **20** (1987), 91–106.

14. R. A. Horn and Ch. R. Johnson, "Topic in Matrix Analysis," Cambridge U. P., Cambridge UK, 1991.

15. Ch. R. Johnson, *Hadamard products of matrices*, Linear and Multilinear Algebra **1** (1974), p. 295–307.

16. Ch. R. Johnson and R. B. Bapat, *A weak multiplicative majorization conjecture for Hadamard products*, Linear Algebra Appl. **104** (1988), 246–247.

17. Ch. R. Johnson and L. Elsner, *The relation between the Hadamard and conventional multiplication for positive definite matrices*, Linear Algebra Appl. **92** (1987), 231–240.

18. M. Marcus, K. Kidman and M. Sandy, *Unitarily invariant generalized matrix norms and Hadamard products*, Linear and Multilinear Algebra **16** (1984), 197–213.

19. M. Marcus and M. Sandy, *Singular values and numerical radii*, Linear and multilinear Algebra **18** (1985), p. 337–353.

20. R. Mathias, *Matrix completion, Hadamard products and norms*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), p. 905–918.

21. R. Mathias, *The Hadamard product norm of a circulant and applications*, SIAM J. Matrix Analysis and Appl. **14** (1993), 1152–1167.

22. R. Mathias and K. Okubo, *The induces norm of the Schur multiplication operator with respect to the operator radius*, Linear and Multilinear Algebra **111** (1994), p. 111-124.

23. K. Okubo, *Hölder-type norm inequalities for Schur product of matrices*, Linear Algebra Appl. **91** (1987), p. 13–28.

24. K. Okubo, *Some equality conditions with respect to the dual norm of the numerical*

radius, Linear and Multilinear Algebra **34** (1993), p. 365–376.

25. S.-C. Ong, *On the Schur multiplier norm of matrices*, Linear Algebra Appl. **56** (1984), p. 45–55.
26. V. I. Paulsen, "Completely Bounded Maps and Dilation," Pitman Research Notes in Math. 146, Longman, Essex UK, 1986.
27. I. Schur, *Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Verddotanderlichen*, J. Reine Angew. Math. **20** (1911), p. 1–28.
28. G. Visick, *A weak majorization involving the matrices* $A \circ B$ *and* AB, Linear Algebra Appl. (to appear).
29. F.–Z. Zhang, *Another proof of a singular value inequality concerning Hadamard product of matrices*, Linear and Multilinear Alg. **22** (1988), p. 307–311.